

# 練り合いのよさに目を向けた指導の過程

— 内留での研究から現場での授業へ —

足利市立第三中学校 菊 地 廣 光

## 1 はじめに

私たちは、算数・数学は、「問いと答えの間」をととても大切に作る教科と考えています。

子どもたちが、授業中に次のようなささやきをします。「こうかな？ よし、やってみよう。」「あれ、うまくいかない。もう一度、考え直してみるか。」「できた、できた。まとめておこう。」このやってみる、見直す、整理する活動を重視しています。

例えば、三角形の内角の和は何度ですか？と聞くと小学生なら分度器でそれぞれの角度を測り和を求める。また、紙に三角形をかき、切り取ったり折ったりして内角を一箇所にあつめる。さらに、みんなで検討し整理する。そして $180^\circ$ だと確信する。これらの活動には、考えたり、作業したり、操作したり、話し合ったり、まとめたりなどの活動が伴いますから、時間がかかります。単に、答えが $180^\circ$ になるということ覚えさせるだけなら時間はかからないでしょう。でも、ここで時間をかけて、あれやこれやとやって角を一箇所に集めた経験は、例えば、以下に示すような中学校での学習にも生かされます。中学生なら三角形の内角の和が $180^\circ$ になることの説明を（平行線の性質）と（角を一箇所に集める）という考えから、うまく説明します。

だから、改めて、やってみる、見直す、整理するという活動を見直したいと考えました。

## 2 練り合いの意味

研究テーマは、練り合いのよさに目を向けた指導の過程です。そこで、このテーマの中の「練り合い」の意味を明確にしたいと思います。

### (1) 練り合いとは

自分が各要素（教材・教師・他人・環境）とお互い関係を保ちながら、自分を高めるために（動機は、「もっと、きれいに、調子よく」「もっと、早く、確実に」等）「ああでもない」「こうでもない」と自問しながら活動していくことです。

(2) 自分を高めるために、練り合いの活動を引き起こす働きかけの例を示します。下の★は練り合いの活動がひそんでいる場合であり、\*は練り合いの活動を引き起こす働きかけの例です。この働きかけから練り合いの活動が生まれます。

#### ★ 自分と教材なら

（問題がよくわからないな？）（別のわかりやすい問題にかえられないかな？）

\* 線を引きながらもう一度読んでみよう。数を小さくしてやってみよう。

★ 自分と教師なら

(先生がニコッとしたのは?) (先生のヒントを聞いて?)

\* 発表してみようかな。もう一度見直してみよう。

★ 自分と他人なら

(自分とやり方が違う?) (全くわからない?) (ほとんど同じだが、少しちがう?)

\* 質問してみよう。どっちの考えがうまそうかな友達に聞いてみるか。

まねてみよう。付け加えたいな。

★ 自分と環境なら

(○○ちゃんも手を挙げているな?) (この計算たいへんだよ?) (いきづまったな?)

\* 自分も挙げてみよう。電卓使おう。再度、話し合いしようよ。

私たちは、練り合いの活動を引き起こす働きかけを、はじめは子どもたちに示唆しながら、やがては子ども達自らがおこなうことをねらっています。

### 3 練り合いを考えたわけ

私たちは、まず子どもたちが自分を高めるために、普段なにげなくやっている活動を意識的に取り入れることによって一人一人を生かしたい、と考えました。

例えば、多角形の内角の和を求める場面を考えましょう。そこでは、よくくさび形の内角の和を求める問題に挑戦します。

三角形2つに、分ける考え方を利用すると比較的簡単に答えはでます。だから、これで終わりがちです。ここで、先生の誘発として「他の求め方もたくさんあるよ。やっpegらん。」と言って、練り合いの時間を設けるのです。すると子どもたちが(一人一人が自分なりの発想で)取り組みをはじめます。いろんな方法が出てきました。次の①から⑤で紹介します。

①三角形に分ける考え方   ②1つの内角に対する外角は残りの内角の和に等しい

③平行線1本利用   ④平行線2本利用   ⑤(極限の考え方)

さらに時間が許せば、次の問題を与えてみましょう。

くさび形の鈍角に対する角と鋭角3つの和の関係を調べよう。

すると、子どもたちは $\angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D$  の関係をつかみます。

この練り合いの活動が後で時間の節約になります。星形の5つの角の和を求める時、かなりの子どもたちに自力解決が期待できます。

#### 4 従来の練り合いの活動で改善を迫られる点

一人一人を生かせる場として練り合いの活動に着目して研究することにしたが、普通の授業において練り合いの活動はなされているものの、改善すべき点が多々あることに気付いた。その主なものを以下の3点にしぼった。

- ・教師主導の傾向が強く、学習者主体の授業になりにくい。
- ・多様な考えの取り上げ方がうまくできていない。
- ・時間がかかりすぎる。

##### (1) 「練り合い」の意義

前述の3点を改善するための一方策としても意義を認め、練り合いについて研究することにしたが、さらに、練り合いの意義を以下のようにとらえた。

- ア 個人に関すること      \*個が生きる。      \*子どもが前面にでて活躍できる      \*話し合いながら、あるいは話し合った結果、学習内容や自分の考えをふりかえることができる。 \*自分の考え方（理解の度合い）を知り、他人の考え方も知ることができる。 \*学んだことをふりかえり、ノートに自分の言葉でまとめていくことによって自分の学習史をつくることができる。（→作品化） \*学んだことを自分の言葉でまとめることを積み重ねることによって、自主学習力がつく。（→生涯学習） \*話したり聞いたりすることはつまずきのある子どもの理解の一助となる。
- イ 集団に関すること      \*支持的風土というものが育つ。      \*子どもが多様な意見を出し合い、授業をみんなで創り上げることができる。      \*集団で学ぶことのよさや楽しさを味わえる。      \*クラスの雰囲気がよくなる。
- ウ 算数・数学に関すること、その他      \*算数・数学の楽しさ、ひいては学ぶことの楽しさを味わえる。      \*数学的な考え方が育つ。      \*算数・数学のよさを味わえる。 \*教師が子どものつまずきを知って援助指導できる。
- (2) 練り合いの活動を重視した指導の過程
- 1時間の指導の過程を、1. つかむ（問題把握）→ 2. しらべる（自力解決）→ 3. つきつめる（比較・検討）→ 4. まとめる（統合・発展を含む）の4段階として考え、練り合いの活動がどのように行われるのか考えてみた。
- ア 「1. つかむ（問題把握）」での練り合いの活動
- 学習問題が提示されても、すぐに題意が理解できるとは限らない。何人かの子どもがどんなことについて考えるのか分らないなどということはよくあることである。ほとんどの子どもが問題の意味が分らないなどということもままある。こんなことの起きない良い問題を提示したいものだが、このような場合次のように対処してはどうだろうか。
- ◎「問題を2回読んでみましょう」あるいは、「問題を覚えるまで読んでみましょう」と言って、問題文を理解させる。
- ◎「分かっていることはどんなこと」、「求めることはどんなこと」といって、問題文を整理さ

せ、題意を理解させる。

◎「〇〇君どんなことを考えればいいのか」と投げかけ答えさせることによって、みんな  
で問題を確認し合う。

◎「〇〇さん、どこが分からないですか」と投げかけ答えさせることによって、理解しにくい  
ところや誤解しやすい点を正しく認識させる。教師が投げかけることが多いと思われる  
が、子ども同士が意見を言い合い、問題を正しくとらえさせるようにしたいものである。

#### イ 「2. しらべる（自力解決）」での練り合いの活動

問題を理解し、何を求めるのかも分った。でも、どうやって解決したらよいか分からない。  
こんな事態が必ずといってよいほど発生する。こんな時にも子ども主体で解決させたいもの  
である。

◎「〇〇さんはどんなふうにして問題を解決しますか」と解決への手だてを持っている何人  
かの子どもに答えさせ、その考え方を参考にさせて問題解決に取り組ませる。予めチェッ  
クしておいて、いろいろな解決策を発表させられると選択の幅ができる。

◎「どうすればこの問題を解決できそうですか」と投げかけて、考えさせる。今までに習っ  
たあのことを使えば解決できそうだとか、図をかいて考えれば簡単だとか、道具を使って  
操作しながら考えれば分かるかもしれないとか子どもからいろいろと出されるだろう。いろ  
いろな意見が出され、それを聞きながら解決の拠り所のなかった子どもと自分に合った解  
決策を選択して実行に移るだろう。また、自分なりの解決策を持っていた子どもの中  
でも、意見を交換するうちに自分の誤りや不備に気が付いたり、更に合理的な解決策に高め  
たり、自分の考え方で良かったんだと自信を深めたりして問題解決に取り組むだろう。自  
分なりの解決策を持って問題解決に入ったものの、途中で行き詰まったり、どうにも正確  
が得られなかったり、できたと思っていたものが不正解だったりなどということが生じる。  
この場面では各人が思い思いの方法で問題解決に取り組んでいるので、全体で検討するな  
どという手段は取りにくいしふさわしくないと考える。したがって、教師の個別指導が基  
本になると思うが、同じつまずきの子どもを集めて練り合いをさせることもあるだろう。  
全体的に誤った方向へと向かってしまっている場合には活動を中断させ、全体で検討しな  
おすこともあるだろう。

#### ウ 「3. つきつめる（比較・検討）」での練り合いの活動

この段階では活発に練り合いの活動がなされると考え、一般的な指導過程として、さら  
に、次のように細分化してみた。

①とらえる ②表現する ③比べる ④深める ⑤ふりかえる ⑥まとめる

これらについて以下説明を加えたい。

①とらえる 発表を聞いたり、掲示されたものを見たりして、他人の考えを理解する場面  
である。次の活動に備えて、質問事項や発表事項をメモしておくこともある。

②表現する 他人の意見に付けたすことをいったり、質問したり、反論したり、と自分の考

えを発表する場面である。

③**比べる** 発表を自分の考え方との相違に気を付けながら聞き、比較・検討する場面である。自分の誤りに気付いて訂正したり、発表者の誤りを指摘したりする。解決までどりつかなかった者はどうやれば良かったのかを考えたり、どこまではできてその先どうすればできたのかを考えたりしながら聞く。理解できない点には質問をすることもある。

④**深める** 自分の考え方は正しかったのか、どこを変えればもっと良くなるか、まちがえたならどこがいけなかったのか、発表された考え方のよさや限界は、今度解く時にはどの方法でやってみようかしら、などと出された発表をもとに考え方をさらに吟味する場面である。

⑤**ふりかえる** 提示された問題を解決するためにどんな考え方を使ったのか、自分はどんなふうに解決したのかあるいは今後どう解決していくのか、だれの考え方が一般的だったか、だれの考え方に感動したか、などここまでの学習活動をふりかえる場面である。

⑥**まとめる** どんなことが分ったのか、まだ何が分からないのかなど、一人一人が自分の言葉で（図でもよい）本時の学習内容をまとめる場面である。

ところで、①から⑥までの活動は必ずしもこの順に進展するというのではなく、授業の流れによって、いったりきたりするものだと考えている。

#### エ 「4. まとめる（統合・発展を含む）」での練り合いの活動

本時はどんなことを学習したのかを発表したり、類題を解いて本時の学習内容の定着化を図ったり、次にはどんなことを学習していかななくてはならないかを確認したりする場面である。

◎「今日はどんなことを学びましたか。」「〇〇さんはどんなふうにまとめましたか。発表してください。」

◎「今日の学習ではどんなことが分り問題として残されたことは何でしょう。」

◎「この時間に学習した考え方で次の問題を解いてみましょう。」

さらに、この段階は、本時に活躍した子どもを賞賛したり、失敗をしてしまった子どもの自信を回復させたりする言葉をなげかけるなど、教師が一人一人を認めてあげられる好機である。

◎「〇〇君の考えはすばらしかったね。」「〇〇さんは勇気をふるって発表できたね。」

「〇〇君は最初から最後まで聞く態度が立派でしたよ。」「〇〇君の発表をひやかした人がいたとき、〇〇さんが注意してくれたのはうれしかったなあ。」「今日は〇〇君の間違いからたくさんの方が勉強できたよ。」

「〇〇さんのあの間違いはみんながよくやる間違いなんだ。もう間違わないですむね。」

## 5 事例 ベグ・ゲーム（課題学習）

2年生を対象に、しらべる段階での練り合い活動を考えてみた。ここでは、最小回数を発見するためにチップを動かすことができることから始まる。ここでは、内留中の授業の流れ

を載せます。

- (1) ゲームの方法 2種類のチップが5枚ずつ。これを、左右入れ換える。

(はじめの状態) ○ ○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ●  
(求める状態) ● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○

ただし、次の条件でチップを動かすものとする。

\* チップは空いているマスへ動かすことができる。 \* 一回に左右のどちらかへ、1マスだけ動かすことができる。 \* 相手のチップは1つだけ飛び越して動かせる。 \* 仲間のチップは飛び越せない。

- (2) 教師 みんなに自由にやってもらい、回数を調べてみよう。

生徒 できた。でも自信がないな? 68回 生徒 わたし、60回だったわ、もしかして正確かな? どうも戻る回数がポイントみたい。

生徒 やった、ぼく55回だ。相手のチップうまく飛び越えるには、ひとつあきわつくらなくてはと思うんだ。

生徒 回数がだんだん少なくなっているようだが最小回数あるのかな?

生徒 よし、やってみよう。最小回数求めるぞ。 生徒 ぼくは、このての問題苦手なんだ。全くわからない。めんどくさいな。

教師 では、チップの個数を少なくして考えて、動きを記録しておくことだよ。

生徒 そうか。それなら、ぼくにもできるかな。では、まず、1個なら、3回だ。本当に3回かな。うん、やっぱり3回だ。そうか、うまく飛び越えなくてならないのか。2個なら、おっと、戻ってしまっはだめだな。よし、よし、できた。8回だ。

## 6 現場にもどって

こどもたちの顔を目の前にすると胸のキュッとする毎日がやってきた。内留で学習指導法を改めて研究してきた事を生かす時です。さっそく、指導案の作成からてがけた。すると、こどもたちの特徴が頭に浮かんできます。そんな想いで書いたものです。

### (1) 数学指導案

ア 指導者 菊地廣光 平成3年11月12日(火) 第5校時

2年4組男子18人女子18人計36人

イ 題材 課題学習「ベグ・ゲーム」(入れ換える方法を考えよう)

ウ 題材の考察

(ア) はじめに

数学の授業で問題を解く活動を通して数学の知識・技能を獲得する価値とともに、問題に対処していくときの感覚や考え・考え方をさらに洗練していく価値を重視したいと私たちは願っています。さらに言えば、久しく知識・技能の獲得を記憶に片寄り過ぎた方法によるあ

まりに、感覚や考え・考え方、態度のような語でとらえようとしているものが、数学処理をする際に、より重要なはたらきをすることを再認識したいと思っています。

それには、まず自分なりに問題に立ち向かったり、その過程を振り返るなどの活動が欠かせないと考えます。ところが、授業の中で問題を課すと、ほとんどの生徒は、(数人が挑戦した解法が黒板に紹介され、それをみんなで修正・発展させた)結果を得てからノートにただ写すという光景が展開するのが常です。数学では多くの類題に接しその解法を確実にすることも大切だが、1つの問題をいろいろな角度から考察したり、発展させて考えたり、既知の問題と統合したりすることも大切です。考えることによって、より多くの類似問題、さらにははじめて対面する問題をも解決できるような、汎用性のある知識・技能・考え・考え方・態度さらには感覚が獲得できるということに気付く機会を与えたいと思います。

#### (イ) ベグ・ゲームの紹介

1980年に横浜国立大学の片桐重男教授により数学教育特講の演習として紹介され、さらには1988年に著書「数学的な考え方・態度とその指導2：問題解決過程と発問分析」の中で中学生に課した場合の指導のポイントを述べています。(ここでは、略します。)

##### {碁石の置き換え問題}

黒と白の2種類の石が図のように11のマスに1つずつ入っています。これらの石は次の3つのルールに従って、マスの中で位置を入れ換えることができますことにします。

- ・石は空いているマスへ移すことができる。
- ・色ちがいの石は、1つだけ相手を飛び越えて空いているマスへ移すことができる。
- ・同じ色の石は飛び越えることができない。

問題 この3つのルールに従って石を動かす時、黒と白の石の位置をすべて入れ換える方法を見つけなさい。

(はじめの状態)

○ ○ ○ ○ ○                      ● ● ● ● ●

(求める状態)

● ● ● ● ●                      ○ ○ ○ ○ ○

#### (ウ) この問題の価値

この問題の特徴は、一見ただけでは数学を考える場面とはとらえがたい点にあり、数学問題でないような場面の解決にも、数学的な考え・考え方や数学的な態度が有効にはたらけば、能率的・合理的に処理できることに気付くことが期待できる問題と言えます。また、この問題をうまく解決する過程を注視すれば、種類の数学的な考え・考え方や数学的な態度が豊富に潜んでいて、それらが重要なはたらきをしていることがよく見通せるはずで

したがって、このような問題では、いろいろな解決方法を試みて、解決したあともう一度見返して、さらによりよい解決のしかたを考える活動が重要となると思います。

#### (エ) 問題解決の過程

この問題の取り組み方には、2通り考えられます。

(石を使ってそれを動かしながら考える)(紙などに動かし方を絵図や記号で書いて考える)  
ここでは、具体物を操作する場合、すなわち石を使って考える過程で考えます。

「解決過程のモデル」

- ① 置き換えられるかどうか、いく通りか試してみる。試行錯誤。失敗。難しい。(意欲を起す要因の一つ)置き換えは、本当にできるのか。解の存在に疑問をもつ。

級友の解から意欲をさらに持続する。

- ② 置き換えから新たな問題が萌芽する。調子よく動かし方を見つけた時、何回で完全に置き換えられるか。無駄な動かし方は、なかったか。この疑問が、好奇心と使命感に支えられて活動が行われる。

- ③ 帰納的な考え方で解決していく。解決が困難のとき、やさしい場面で考える。単純化。さらに置き換える方法の類推につながる。n = 5 のとき35回できた。

これで、一応の解決が得られたわけであるが、試行錯誤から、はじめての35回を得るまで(その途中)の活動を体験する中や、これまでの解決の過程を振り返る中で最少回数の問題を解決しなければならなくなる。

- ④ 演繹的な考え方で解決していく。お互いの成功した場合の回数を見合えば、最も少ない回数はいくつだろうと思うことは自然である。戻る操作のない動かし方は基本的には1種類。③④の詳しいことは参考資料の欄で見てください。

#### エ 題材の目標(2時間扱い)

- (ア) 本時 調子よく動かす方法を主体的に考え・工夫しようとする。うまくいかない時他の人のアイデアをうまく取り入れることができる。最少の動かし方ができる。

(帰納的な考え方)

- (イ) 次時 動かし方から理由を考えることができる。(演繹的考え方)さらには記録(メモ)することから解決の理由を考えることができる。石の動かし方のルールをかえた問題をつくる。

\* 60回でうまく入れ換えるには?(ルールはそのまま)石を並べる枠を十文字形やダイヤモンド形のように2次元にしたら。飛び越した相手の石を取り去り、最後に1個だけにする問題。・・・

#### オ 本時の指導

- (ア) 題目 入れ換える方法を考えよう

- (イ) 指導方針

- ・自分なりに解決できるように時間の確保をする。
- ・一人ではうまく解決できない問題もみんなで取り組むとうまくいくこともわからせたい。
- ・ゲームの解決に数学的思考形が有効に働くと調子よくできることから、数学のよさをわ



からせたい。

- ・本時の学習を振り返えさせることから数学する姿をつかませたい。

(ウ) 展開 略

(エ) 評価

- ・生徒が自分なりに問題を課題ととらえ取り組んでいたか。
- ・自分なりの解決方法を見つけることができたか。
- ・最少回数の動かし方がわかったか。
- ・最少回数が35回の理由が明らかになったか。(帰納的に)

(2) 参考資料 1

帰納的な考え方による解決(その1) 置き換えの数に注目し、その規則的をみつける。

黒の石の個数	1	2	3	4	5	...	n
白の石の個数	1	2	3	4	5	...	n
合計の石の個数	2	4	6	8	10	...	2n
置き換えの回数	3	8	15	24	35	...	$n * n + 2n$

帰納的な考えによる解決(その2) 直接の操作から、操作の過程を記録して考える。

n = 1 のとき	n = 2 のとき	n = 3 のとき
○●○	○●●○○●●○	○●●○○○●●●○○○●●○
→↑→	→↑←↑↑←↑→	→↑←↑↑→↑↑↑→↑↑←↑→
1 1 1	1 2 2 2 1	1 2 3 3 3 2 1

→← 左右の動き

↑ 飛び越えを表す

n = 4 のときも同様に行うと

1 2 3 4 4 4 3 2 1 で 24回

n = 5 のときも同様に行うと

1 2 3 4 5 5 5 4 3 2 1 で 35回

一般化すると

$$\begin{aligned}
 &1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots\ n\ n\ n\ \dots\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \text{ から} \\
 &(1+2+3+4+5+\dots+n) * 2 + n \\
 &= n(n+1) + n \\
 &= n * n + 2n
 \end{aligned}$$

(3) 参考資料 2

演繹的考え方(その1) 解決過程の見直しをする。

- ① 5個のときまでの置き換え方に無駄な操作はなかったか?(戻る操作はなかったか)  
(もっとも飛び越しはできないか)
- ② 同じ色の石を飛び越すことはない。

- ③ 同じ色の石の順番は変わらない。
- ④ どの石も相手の石を全部、しかも1回だけ飛び越す。
- ⑤ 同じ色の石が連続すると飛び越せない。
- ⑥ ○と●が交互になるように動かせば、うまく飛び越せる。

上の動かす性質を整理することにより最少回数を納得する。

演繹的考え方(その2) 目的の位置に移動するまでに戻る動きはない。

- ① 1つの石は  $(n+1)$  マス動く。
- ② 各石が1マスずつ動くとする。
- ③ すべての石が目的の位置に到達するまでには、 $\{(n+1) * n\} * 2$  の操作をする。しかし各石は、相手の石をすべて飛び越す。
- ④ 例えば、○の各石は●の各石を飛び越す回数だけ少ない回数で移ることになる。
- ⑤ その飛び越し回数は○と●のどちらかだけを考えればよい。
- ⑥ ○は各●を  $n$  個飛び越え、そのような○は  $n$  個あるから、少なくなる回数は  $n * n$  となる。これらのことから最少の操作回数は、 $\{(n+1) * n\} * 2 - n * n = n * n + 2n$

## 7 おわりに

現場で実際の授業を組む時、すこしでも子ども達にのってもらおうといろいろな策を練る。今回に限っていえば、まずジャンケンで代表を決め今日の課題を袋の中から選ばせるという興味付けをした。また、強調するためにプラカードに用語を書き教室の前でパフォーマンスを演じた。

しかし、この余裕を持つために十分な教材研究が大切であることは言うまでもない。すぐに役立つフレームワークを今回の内留で身につける事が出来ました。そして、1つの方法としての練り合いの学習を子どもたちにも確認しながら授業を進めたい。子ども達も次にやることの見やすさがあって活動しやすいだろう。すると、自然と数学的考え方を意識するようになると思われる。

そして、「今日の学習で何がわかって何が課題として残されたか。」を意識するようになったとき子ども達が主体的に学習したことになるだろうと思います。そのためには、毎時間の終わりのとき振り返るチャンスを計画的にとってやることだと思います。まさに、「振り返れば、愛」ということです。

最後になりましたが、おおくの先生方に絶えず温かいご指導・ご援助を頂き日頃の教育活動ができることに心から感謝申し上げます。また、この論文を読んで頂いた先生から、ご指導を頂ければ幸いです。

## 評

テーマのように、この研究レポートは、菊地先生が宇都宮大学に内地留学された時の研究をベースにしております。学校に戻られ実践された研究内容の一端であります。

特に、練り合いのよさに目を向けた指導の過程に着目した研究を通して、一人一人が生きる数学科学習を目指しております。一時間の学習過程を4つの段階（つかむ、しらべる、つきつめる、まとめる）でとらえ、その各段階での練り合いの場面についての考察を深め、学習者主体の授業づくりに迫っていかうとしております。

今後とも研究を継続されるとともに、練り合いの活動を重視することによって生じる諸問題、例えば、子供からの多様な考えの取りあげ方やその生かし方のむずかしさ、時間がかかりすぎるのではないか等に対して、日常の授業実践を通した解答を示しながら、更に、子供一人一人が生きる数学科授業のあり方を深められることを期待します。