自ら考える力を育てる数学指導

足利市立北郷中学校　関　根　英　男

1. はじめに

毎日生徒に接していて、最近変ってきたなあーと思われることのひとつに、言われたことはやるが、頭を使って考えることをやらなくなってきたことがあげられる。このことは、学習面ばかりでなく、生活面についても言えそうだ。

しかし、以前に行ったアンケートの中で、「あなたはどんな授業のとき、今よりもやる気が起こりますか？」という質問に対し、「だいじな所をはっきりと」、「ゆっくり考える時間を」、「勉強の仕方をもっと」、「わかるようにゆっくりと」、「グループで教え合う」・・・の順で回答があったが、これらの中で、２番目に多い「考える時間を多くとってほしい」ということに注目できる。このことは、生徒が自ら考えることを嫌っているのではなく、考える時間がすくないので、教師側に工夫してほしいと訴えているようにも受けとれる。つまり、教師側の工夫で、生徒に考えようとする態度が育つのではないかと思われる。

また、昭和５６年度から実施される教育課程でも、「自ら考え正しく判断する力を養う教育への質的転換」ということが重視されている。

そこで、ここでは、毎日の授業を、「考える」という視点から、教師が見直し、工夫することによって研究主題にせまろうとした。

2. 数学の授業にあたっての基本的な配慮

(1) ねらいをはっきりさせる

数学は系統性がつよい。そのためにも、本時でのねらいだけでなく、単元の中での本時の位置関係、学年や学年間の単元のつながりなどもはっきりつかみたい。また、このねらいを達成するためには、どんな教材を、どのように生徒に与えれば学習できるのかを意図的に配慮した。

(2) 課題の工夫をしてみたい

「授業は、具体より抽象に進め」ということは、数学の指導での鉄則であるが、生徒たちは白紙で授業にのぞむのではなく、前時までに獲得した知識や技能など（個人差が大きい）の上に、新しい課題をのせて考えていくのであるから、生徒の知的な実態をしっかりつかんでおいて、適切なる課題提示ができるようにすることが大切である。

(3) 考える時間を多くとってやりたい

限られた時間の中で、考える時間を多く生みだすには、課題提示の工夫、説明の方法、板書の工夫、発問の内容、評価問題の分析などの研究を深め精選することによっても考えられる。つまり、生徒の実態をふまえ、ねらいや内容をおさえた適切な学習過程を教師自らつくりあげることによって可能になる。

(4) 心のふれあいを大切にしたい

このことは、すべての教科にいえることであるが、どんなすばらしい指導法も、心のふれあいなくしては大きな効果を生みだすことはできない。このふれあいの根底には、教師と生徒の1対1の人間尊重の精神が流れている。生徒の気持ちや考えをあたかも自分自身のものであるかのように感じとり、その内側から理解しようと努める態度がそれである。

(5) 生徒たちの成果を評価してやりたい

考える学習を行うことによって、楽しさが増してくる。しかも、次の段階でこれらの考え方が課題解決に大きな力となることもわかっているが、この大きな力、つまり考える力をなんとか評価してやりたいものであるが、これがなかなかむずかしい。たとえば、相似の証明をする問題で完全解でなくても、いくつかの段階を作って、その4分の3ができていれば、得点の75%を与えるというような評価の上での配慮をしてやることも大切であろう。

3. 指導の実践例

(1) 題　材　　三角形の相似条件（4時間扱い）

(2) ねらい　　①三角形の相似条件について理解させる

②三角形の相似条件を利用して、図形の性質を考察させ、理解させる。

(3) 指導計画

第1時　三角形の相似条件　（三角形が相似になるための条件）

第2時　相似な三角形の判別　（辺の長さや角の大きさに着目して三角形を判別する）

第3時　三角形の相似条件の利用（相似条件を用いて図形の性質を証明する）……《本時》

第4時　問題練習

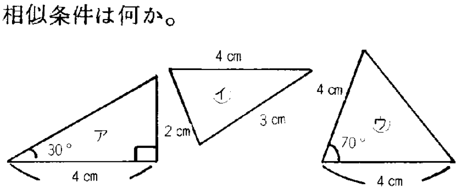
(4) 題材の指導観

三角形の相似条件については、三角形の合同条件の場合を思い起こさせながら、形は同じでも大きさがちがう場合、つまり拡大・縮小という操作的観点から導入し、さらりと扱った。したがって、具体的な例を通して、形が同じということの意味をしっかり理解させないと、相似形の十分な活用が期待できなくなるので、第2時として、相似な三角形の判別に1時間をあてて、時間的にも余裕をもたせ理解を深める努力をした。

考える力を育てるという視点に立てば、課題提示にも次のようなことに留意すべきだ。

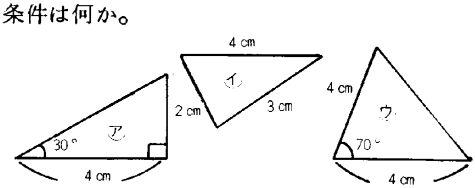
A－①

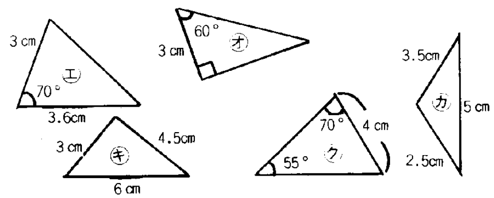
次の図に示す㋐～㋒の三角形について、相似な三角形はどれとどれか。またそのときの相似条件は何か。



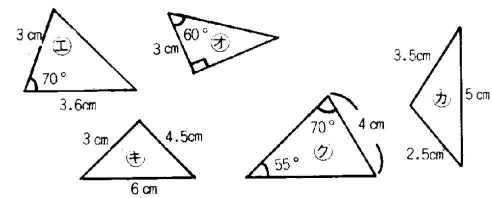
A－②

次の図に示す㋐～㋒の三角形について、相似な三角形はどれとどれか。またそのときの相似条件は何か。





㋐と（　）相似条件は（　　　　　　　　）
㋑と（　）　〃　（　　　　　　　　）
㋒と（　）　〃　（　　　　　　　　）

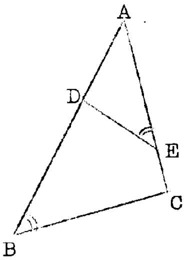


○と（）相似条件は（　　　　　　　　）
○と○　〃　（　　　　　　　　）
○と○　〃　（　　　　　　　　）

A－①は、左側に㋐　㋑　㋒をあげておいて、それらと相似な三角形を選択させるもので、A－②は、８つの中から相似な三角形を見つけ出すものであり、考える範囲が広い。

B－①

次のように証明した。図を見ながら□にあてはまるものをいえ。



△ＡＢＣと□で

∠Ａ＝∠□………(1)

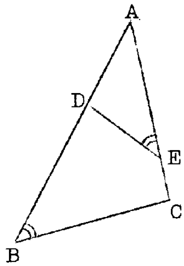
∠Ｂ＝∠□………(2)

(1)，(2)から２角がそれぞれ等しいので

△ＡＢＣ ∽ □

B－②

次のように証明した。図を見ながら □ にあてはまるものをいえ。



△□と△□で

□＝□……(1)

□＝□……(2)

(1)，(2)から２角がそれぞれ等しいので

∠□ ∽ △□

Ａ，Ｂ２つの問題をみると、①より②の方がむずかしいようであり、考える余地も大きい。一般には、①の方が、取りつきやすく、多くの生徒にわからせることができると思われている。

そこで、Ａ－①，Ｂ－①を１クラスに出題し、Ａ－②，Ｂ－②を他のクラスに出題して、その正答率を見ると、下の表のようになった。

A－①

正　答	アと㋔	イと㋖	ウと㋗
正答率	９７％	５７％	５１％

A－②

正　答	㋐と㋔	㋑と㋖	㋒と㋗
正答率	９４％	４６％	５９％

B－①

正　答	頂点・角・辺が対応順
正答率	７１％（$\frac{2}{3}$は∠ＡＥＤを∠Ｅ）

B－②

正　答	頂点・角・辺が対応順
正答率	６９％（$\frac{1}{2}$は∠ＡＥＤを∠Ｅ

この結果では、２つの問題Ａ，Ｂの①の型でも②の型でも、正答率は、ほとんど変らないことが

わかった。だとすれば、①の型は、出題者の思考過程を再現する形をとるのに対して、②の型は、解答者の思考過程を表現することになるから、考えるという点からは、②の型がのぞましいことになる。

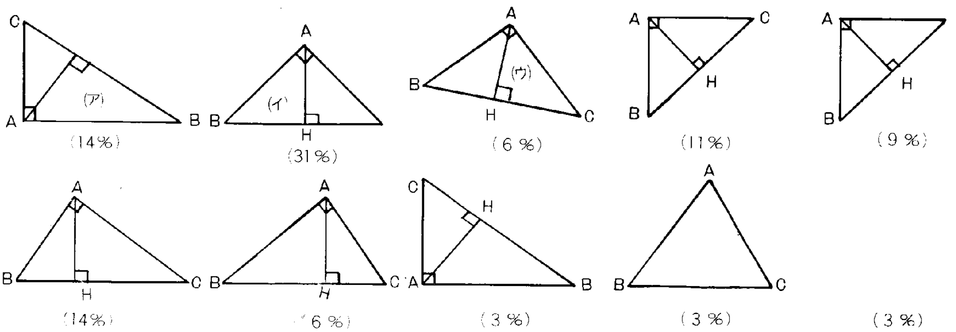
それでは、すべて②の型で出題すればよいかというと、そうとばかりはいえない。生徒の実態をふまえたうえで、本時のねらいとの関係から決められなくてはならないものである。

本時のねらいを達成するための課題を、どのようなものにするかを考える資料とするため、第2時終了3分前に、問題Cを提示し作図させてみた。

C

∠A＝90° の△ABCで、Aから辺BCに、垂線AHをひく。これを作図しなさい。

生徒の作図例を示すと、



(イ)に代表される直角二等辺三角形を書いたものが多い。しかし、直角二等辺三角形は、特殊な三角形であり、直角三角形全体の代表としては不適当なものであるし、相似な三角形を考える場合には、なおさらまずい図である。相似な三角形を見つけ出すというねらいからは、一般的な直角三角形を図示してしまうほうがよい。

以上、生徒の実態を考察してきたが、本時の展開にあたっての考え方を次のようにまとめることができる。学習のねらいのひとつ、相似な三角形を見つけださせるには、A－①，A－②の正答率に差がないのであるから、A－①よりもA－②の型で学習をしておくほうが効果的であろう。

次に、相似であることを証明できるというねらいを達成するには、B－①よりもB－②の型、つまり、生徒が自分の思考過程を自由に表現できる型にしてやることが大切である。

さらに、相似な三角形の性質を用いて、辺の長さを求める場合でも、新しく辺の長さを求める問題を提示するよりも、見つけ出した相似らしい三角形、そして相似であることを証明できた所のその課題を使って、辺の長さまで求めさせるほうが、考える力を育てる視点からはよいのではないかと考えた。

(5) 本時の指導

① 題　目　　三角形の相似条件の利用

② ねらい　　◦相似な三角形を見つけ出し、それらが相似であることを三角形の相似条件を用いて証明できる。

◦相似な三角形の性質を用いて、辺の長さが求められる。

③ ねらいと課題との関係

教科書にそった学習の流れでは、課題（例題）一問３一問４一練習となるが、思考の流れに切れ目があり、それらひとつひとつが別々の問題という感じがするとともに、考えさせる範囲もせまく、ねらい達成がむずかしい。そこで、ここでは次のようにねらいと課題との関係を考えてみた。

ア. 課題で図までを書き入れたのは、題意に適した作図ができる生徒は半分という実態からである。

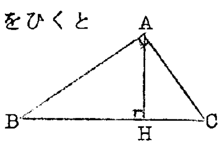
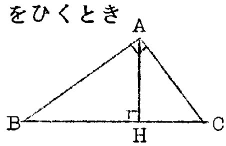
イ. 課題(1)では、•相似な三角形を見つけ出すことができる，•どのような順序（思考過程）で見つけ出すか，•それらを記号を使って対応順に書き表わすことができるかどうかがねらいである。

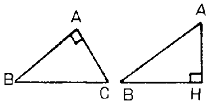
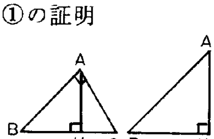
ウ. 課題(2)では、•(1)からでてきた各組が相似であることを三角形の相似条件を用いて証明できるか、•△ＨＢＡ ∽ △ＨＡＣの証明が２通り以上の方法で考えられるかがねらいである。

エ. 問題１では、相似な三角形の性質、ここでは、ＡＢ：A′B′＝ＡＣ：A′C′がわかっているかどうかがねらいである。

オ. 問題２では、•課題に数字を入れて、相似な三角形ならば対応する辺の比は等しいという性質を使って辺の長さが求まる，•計算式では$x \times x = 36$からxを考えさせることにより、平方根への素地にもしたいねらいがある。

④ 展 開 （昭和５６年２月１２日(木)） Ｔ：教師の発言， Ｎなど：生徒の発言

Ｐ 型（教科書にそった学習の流れ）	Ｑ 型（工夫した学習の流れ）―本時の展開 （本時の流れ）	（配分）	（教師の発言と生徒の反応）	（備 考）
〔課題〕∠Ａ＝９０°の△ＡＢＣで、Ａから辺ＢＣに垂線ＡＨをひくと  △ＨＢＡ ∽ △ＡＢＣ である。 これを証明せよ。	〔課題〕∠Ａ＝９０°の△ＡＢＣで、Ａから辺ＢＣに垂線ＡＨをひくとき  次の問いに答えよ。 (1)相似な三角形をすべてあげなさい。	３分	T. この課題を考えなさい	•小黒板に用意しておく •どの三角形から書きはじめるか •Ｐ型ではすでに△ＨＢＡ ∽ △ＡＢＣが与えられている
			T. 相似なものを書いてもらおう。Ｎ君 N. （黒板に）△ＡＢＣ ∽ △ＨＢＡ………①	•Ｐ型のように△ＨＢＡ ∽ △Ａ

（答合せ）  △HBAと△ABCで ∠BHA=∠BAC=90° ∠B ＝ ∠B これで２組の角がそれぞれ等しいことがいえたから △HBA ∽ △ABC	（答合せ） ①△ABC ∽ △HBA ②△ABC ∽ △HAC ③△HBA ∽ △HAC	5分	T. 次はA君 A. （黒板に）△ABC ∽ △AHC………② 席についてから、ああそうだといって△AHCを△HACと訂正した。 T. なにかまずかった？ A. 対応順に書いてなかったから T. まだあるかな？ O君 O. （黒板に）△HAC ∽ △HBA………③′ A. （書き終るのを待って）左と右の三角形を逆に書いた方がいい。 “そうだ”という声が多い T. ③′は、△HBA ∽ △HAC………………③と書いたほうが考えやすいんだね。	BCとはかかない。①の書きかたのほうが、生徒の思考過程に合っているようだ。 ・P型では、対応順に書いてあるので直接でてこないが、つまずきから対応順に書くことが確認された。 ・相似な三角形が3組でてきた。しかも、教師の予想通り、考えやすい順にでてきていることも自然である。
〔問題１〕上の課題で、△HBA ∽ △HACであることを証明せよ。	問い (2)それらが相似であることを証明しなさい。	15分	T. この①～③までの3組について、相似であることを証明してもらおう。	・机間巡視しながらチェックしていく。 ・①，②はかんたんのようだ。 ③は、くるしんでいる。
	（答合せ） ①の証明  		T. それでは、証明を1題2名でやってもらおう。 T. ①はOさん，Kさん ②はMさん，K君 ③はM君，H君	・むずかしい問題は、2名で1組として指名している。

（答合せ）

△HBAと△HACで、AH⊥BCだから

∠AHB＝∠CHA
＝90°

だから

∠B＋∠BAH
＝90°

また

∠HAC＋∠BAH
＝90°

よって

∠B＝∠HAC

したがって

△HBA ∽ △HAC

〔問題2〕△ABC ∽ △DEFのときAからBCへひいた垂線をAH，DからEFにひいた垂線をDKとするとき、

△ABCと△HBAで

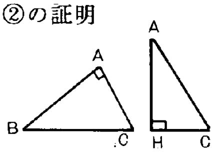
∠A＝∠AHB
＝90°……(ア)

∠B＝∠B……(イ)

(ア)，(イ)から2角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △HBA

②の証明



△ABCと△HACで

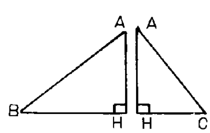
∠A＝∠AHC
＝90°……(ア)

∠C＝∠C……(イ)

(ア)，(イ)から2角がそれぞれ等しいので、

△ABC ∽ △HAC

③の証明



△HBAと△HACで

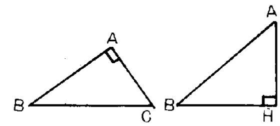
∠AHB＝∠CHA＝90°……(ア)

∠B＋∠BAH
＝90°

∠HAC＋∠BAH
＝90°

よって

①の場合は



△ABCと△HBAで

∠B＝∠B……………(ア)

∠A＝∠H＝90°……(イ)

(ア)，(イ)から2角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △HBA

②の場合は

△ABCと△HACで

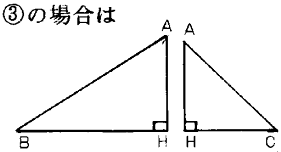
∠C＝∠C…………(ア)

∠BAC＝∠AHC
＝90°……(イ)

(ア)，(イ)から2角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △HAC

③の場合は



△ABHと△CAHで

∠BHA＝∠AHC
＝90°………(ア)

∠B＝∠HAC………(イ)

(ア)，(イ)より2角がそれぞれ等しいので

△ABH ∽ △CAH

• ①の(イ)で∠A＝∠Hになっている分解図を書いた場合には、とくに注意を用する。

• P型では、2組の角がそれぞれ等しいといっている（三角形の合同条形のところでは、3辺がそれぞれ等しいといっているのに）が、Q型では、2角がそれぞれ等しいというという表現をとり、三角形の合同条件のいいかたと一致させた。

次のことを証明せよ。
(1) △ABH ∽ △DEK

(2) $\frac{AH}{DK}=\frac{AB}{DE}$

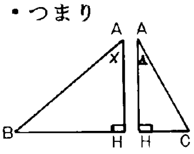
（答合せ）
(1)について
△ABC ∽ △DEFだから
∠B=∠E……(ア)
AH，DKは垂線だから
∠AHB=∠DKE=90°…(イ)
(ア)，(イ)から
△ABH ∽ △DEK

(2)について
△ABH ∽ △DEKであるから、対応する辺の比は等しくなるので
$\frac{AH}{DK}=\frac{AB}{DE}$

∠B=∠HAC………(イ)
(ア)，(イ)から2角がそれぞれ等しいので
△HBA ∽ △HAC

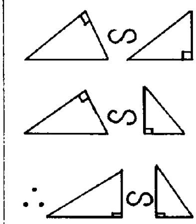
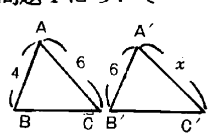
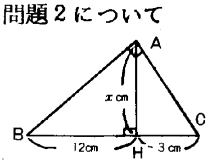
T. 証明を書いてもらったが、何か気のついたことがあるかな？
Y. ①の証明で∠A=∠Hではまずいと思います。
T. どのようにYさんは考えましたか。
Y. ∠BAC=∠BAHです。
T. ∠A=∠Hではなぜいけないのか？
• あちこちから、角がはっきりわからないからの声
T. なるほど、ではYさんのように∠BAC=∠BHAと書けば、はっきりするわけですね。
S. ③の証明で、(イ)がわかりません。
T. 書いてくれたM君，H君に聞いてみよう。
M，H はっきりとわからないが、∠B=∠HACになるらしいので書いてしまいました。
T. 理由が説明できる人いますか？
A. ②の証明で、残りの角も等しいから
T. なるほど、②の証明の結果を利用する方法だね。ほかにもあるかな？
K. ∠B+∠BAH=90°
∠BAH+∠HAC=90°
ゆえに ∠B=∠HAC
T. （図解しながら）わかりますか？
•全員うなずく
T. ③の証明で、残りの角も等しいからとして証明した人は？
• 5名（14％）が手をあげる。
T. それでは、和が90°になるから等しいとして証明した人は？
• 8名（23％）が手をあげる。

•証明問題での問題点だ。どの程度まで書かせるのかということが。

•つまり


$\begin{cases} \times+\bigcirc=90° \\ \times+\triangle=90° \end{cases}$
∴ ○=△

•机間巡視で次のように証明していた生徒もいたので

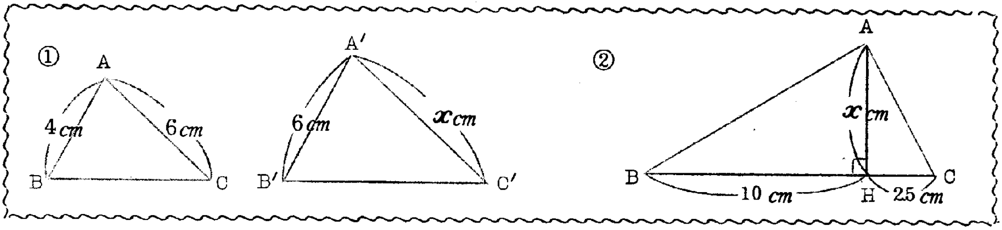
		17 分	T. 理由はいろいろな方法で説明できるが自分で納得できればよいわけです。 T. それでは訂正などをしなさい。	「それもいいね」と確認しておいた。  ∴
〔問題3〕∠B＝∠Eである△ABCと△DEFで、AB＝6 *cm*, BC＝4.5 *cm*, DE＝10 *cm*, EF＝7.5 *cm*のときこの2つの三角形は相似であるといってよいか。また、AC＝9 *cm*のとき、DFの長さは何*cm*か。	〔問題1〕△ABC ∽ △A′B′C′でAB＝4 *cm*, AC＝6 *cm* A′B′＝6 *cm*のとき、A′C′の長さを求めよ。 〔問題2〕課題で、BH＝12 *cm*, HC＝3 *cm*のときAHを求めよ。	8 分	T. 2つの問題を考えなさい。	・机間巡視をしながらチェックすると、問題1では、9 *cm*（正解）にならない生徒が6名（17％）いたがそれぞれにヒントを与えた。 ・問題2は、ほとんどできていない。 $x\times x=36$, $x^2=36$ まで考えられてもxが求められない。
（答合せ） $\frac{AB}{DE}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\frac{BC}{EF}=\frac{4.5}{7.5}=\frac{3}{5}$ ∠B＝∠E よって △ABC ∽ △DEF DF＝xとすると $\frac{6}{10}=\frac{9}{x}$ $x=15$　15 *cm*	（答合せ） 問題1について  $4:6=6:x$ $x=9$　9 *cm* 問題2について  $12:x=x:3$ $x\times x=36$ $x=6$　6 *cm*	2 分 計 50 分	T. それではたしかめをやってみよう。時間がないので私が答えをいいます。問題1は9 *cm*, 問題2は6 *cm*です。 T. 問題2ができた人はいますか？ ・ 3名が手をあげる。 T. 問題2は、ちょっとしたことでわかるんだがなあー。次時に考えてみよう。 T.今今日はこれでおわり。	・おわりの台図と同時に、正答者を中心とした検討の姿が目立った。

(6) 授業の反省

教科書にそった学習の流れでは、ひとつひとつが問題という感じで取り組むことになるが、工

夫した学習の流れでは、ひとつの課題を視点をちがえて多方面から考察したので、相似な三角形を見つけ出すこと、それらが相似であることの証明、相似な三角形の性質を利用して辺の長さを求めることが、個々バラバラに理確されるのではなく、それらがつながったものとして理解されたと思う。したがって、問題数がすくなく感じたので、そのぶん考える時間が多くとれたのがよかった。

また、終了直前、問題1と問題2については、正答を示しただけなので、終了後とくに問題2の正答に到る過程の解明について、多くの生徒が意欲を示していたので、どの程度、自ら考え理解したかを次時に、説明する前に、次の出題(8分間)でさぐってみた。



結果をみると、35名中①の誤答者は3名(授業中は6名)で、②の正答者は10名(授業中は3名)であった。 $x \times x = 25$, $x = 5$ という考え方は、なかなかむずかしいようである。とにかく、教師に自ら考える姿勢があれば、すこしずつ、自ら考える生徒が育っていくのではないかと思われる。

4. おわりに

自ら考えるということは、簡単にいえることであるが、決して容易なことではない。

ここでは、教科書をベースにして指導している日常をふりかえり、教科書の例題(課題)に、こんなちょっとした工夫をすれば、生徒がより考えるようになるのではないかという実践例をあげたつもりである。

数学の指導過程には、知識や技能、考え方などを理解させる過程(わかる)と、それらを定着させる過程(できる)とがあるが、さらに、理解させる過程にも、ここの所は説明してわからせる所ここの所は考える力を育てる所という区別はあるように思う。

今後とも、数学の中で考える力を育てるには、どんな内容の、どのような指導で育つのかを検討していくことが、非常に大切であると考える。