関数的な見方，考え方を育てる指導

足利市立東小学校　須藤春男

1　はじめに

算数，数学教育の現代化が叫ばれ，現代化にそった学習指導要領は，昭和46年度から実施となった。

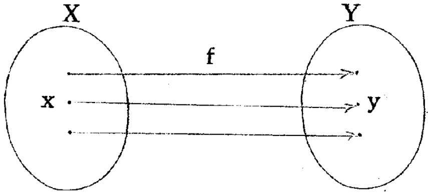
この現代化の中で叫ばれている集合，関数，構造，確率，統計などの考えとは何か。これらのことを何も理解せずして，授業に臨むことはたいへん不安である。さいわい「算数教育の現代化について」足利市算数教育同好会で研究を進めたので，その中の一つ「関数」について，もう少し研究してみようと思った。

6年の目標⑷には，「比例などの理解を通して関数的な見方をのばすとともに…………」とある。「比例，反比例の関係」の授業を通して，関数的な見方，考え方を養い，また，私自身，関数的な考え方や関数について知るために，ここに研究テーマを取りあげたのである。

2　研究内容

⑴　関数的な見方・考え方について

「2つの集合XとYがあって，Xの任意の要素のxに対してYの1つの要素yが対応しているとき，この対応の規則を集合Xから集合Yへの関数」といい，Y＝f(x)と表わす。



集合Xのとりうる値を変域（定義域）

集合Yのとりうる値を値域といっている。

小学校においては関数そのものを指導するのでなく，関数的な見方・考え方を指導するのである。

関数という場合には，普通次の2つに分けて考えることができる。

㋑　あることがらBと，調べようとすることがらAがあるとき，この両者の間に関係があるかないかを調べる。いいかえれば，AがBに依存するか否かを調べることである。

㋺　もし，関係があるならば，その関係の仕方（対応）を吟味することである。

㋑が関数を生みだしていく基礎となる考え方であり，関数性と呼ばれ，㋺は普通，関数といわれているものである。しかし，今までの指導では，㋺の式やグラフに書くもの，書かれたものだけに力がおかれ，㋑の意味である関数性に立脚した思考，いわゆる関数的ということばの中に含まれているべき，集合，順序，変数，対応の観点から考察していく必要があると強調されている。以下この4つの観点について述べる。

A　集合　（set）

関数的な考えを進めていく上で最も根本的なことは，思考の対象とするものをどのような観点では握させるかということである。個々のものを具体的に示されたとき，それを単に一つの具体

物としてだけ考えていては関数的に考えているとはいえない。それと同じ仲間に属するものの一つとしては握させることが大切である。具体的な個々のものだけを処理していく段階から，ことば（用語）を用いて考える段階まで進むとき，そこには必ず集合の考え方がある。それによって具体的なものとしての用語を理解させるに止まらず他のものと分類してできたものの集まりの総体として用語をは握させる必要がある。すなわち，用語の概念提案をする「定義」の指導や，他のものとの区別を判断する「分類」の考え方が重要になってくるのであると考える。

B 順序（order）

数学における対象をみるとき，その順序に眼をつけることが大切である。ただ漠然とものを見るのではなく，たとえば「大小の順」のようにそこにあるものを整理して秩序正しく物を眺めていく，そして，どう見れば秩序正しく眺められるかを考えなければならない。一つの規則を発見するとき，思いつきでは十分な思考が働いたとはいえないし，ものを動かしてみるとき，秩序や順序があって，はじめて規則が発見しやすくなるのである。

順序よく，秩序正しく物を眺めるということは，リズム感をもつようにするということである。一定の量ずつふやしていくなどということは，一種のリズムであり，リズム感があってはじめて規則性を知ることができるのである。どのように並べ，または，変化させていけばそこにリズムができるかを考えて物事を処理していくのが順序の考えであるともいえる。

C 変数（Variable）

Variableは変数と記されているが，Variableのことばそのものは「変わりうるもの」を示している。変わりうるものであれば数の集合でも図形の集合でも，ものの配列でもよいのである。Variableは変数が数学的に明確に規定できるものであれば何についても考えられるのであり，変数の概念は集合を意識することから生ずるのである。

「数学的な考え方と新しい算数」には，変数とはある集合の要素が代入される位置をしめしているもの（Place holder）ということができる。 とし，「新しい数学」には，変数は普通集合の任意の要素を代入しうる一つの記号としている。いずれにしても，変数は変域に属する要素を代入しうる位置をしめている記号であるといえるようである。

変数の概念で大切なのは，変域である。変域は変数の代入しうる要素の集合である。つまり変数を変わりうるものとみたとき，変わりうるものの集合の範囲を変域とすることができる。その場合変わりうるものの範囲の限界を明確に規定して変わりうるものの意味を明確にする必要がある。

変数を変えるときには，どのような範囲の値をとることができるか，それ以外の要素を代入したときはどんなことがおこるか，ものの依存関係があるかないかに目をつけて，変わりうる範囲の限界を考えることが大切である。

VariableはVari（変化）とable（可能）という意味を有している語で，Variableの根底に流れている考えは，与えられたものを与えられたものとして受けとめる人間ではなく，それを自分で積極的に手を加えていく人間を育成するにも通じていると考えられる。

変数の見方で大切なことをまとめると，

① ある数量が与えられたとき，それは同じ仲間の代表だから，代表は変えることができると考えられる。

② あることに着目したときの同じ仲間の変域は，どの範囲か，また，変えるときにはどの範囲まで変えることができるかを考えていくことである。

D 対応（Correspondence）

関数の本質的な性質は，変数の性質というより対応である。Aという集合の一つの要素をきめると，それに応じてBの集合の中の要素が一つきまる。このような対応を「一意対応」といい，逆にBの集合の中の要素を一つきめたとき，必ずしもAの集合の中の要素が一つきまるとはかぎらない。

これに対して，集合Bの要素を一つきめると，集合Aの要素も一つきまる，つまり，逆も一意対応になっている対応を「一対一対応」というが，関数では対応が一意対応になっていればよいのであって，一対一対応でなくてもよいわけである。そして，一般に，二つの変数x，yの集合の要素について一意対応があるとき，「変数x・yの間に関数関係がある」とか「yは関数fによってxに対応づけられる」というような表わし方をする。

また，それ以前に，ものは「対」になるものと「対」にならないものとがある。この対になるものをさがすことが関数といわれる実質的内容となる。それは，あることがらBと，調べることがらAがあるとき，この両者に関係があるか，AがBに依存するか否かを判定することであってもし関係があれば，関係の仕方（対応）の規則をみつけることである。つまり，きまればきまるという対応間に，何かきめ方があるというルールをみるのが関数である。

ところで，対応はとかく数式の場合だけに考えられがちである。しかし，これは図形にもいえることであり，どういう規則によってきまるのかという見方を養うことが大切である。

対応の考えで大切なことは，

① 「何がきまればきまってくるか」を考え，その対応の間に「何かきめ方があるか」を追求することである。

② そして「変われば変わる」「変わっても変わらない」ものを見いだして対応間に不変なものをみつけることである。

これら，関数的考えの基礎となる4つの考えは，個々ばらばらの立場で考えられるものではなく，相互に関連しあい，組み合わされて指導されなければならない。そして，これらは関数教材のところではじめて指導するのでなく，低学年からあらゆる教材を通して，この関数的な考えを導入することが大切である。

(2) 関数的な見方の指導の段階

① 集合の意識をもつことができるようにする。

② 「伴って変わる2量」の意識をもつことができるようにする。

③ 2つの集合X，Yにおいて対応する要素を見つけることができるようにする。

④ 変数（変量）の意識をもつことができるようにする。

⑤ 対応の規則性を見つけることができるようにする。

⑥ 対応関係を式や表やグラフに表わすことができるようにする。

⑦ 代数的な式の変形ができるようにする。

⑧ 公式の中の要素を変量と考え，公式を変量間の関係と見ることができるようにする。

⑨ 関数的な見方，考え方を用いて問題解決することができるようにする。

これらは，1つの題材の中に，いくつかまとまって含まれているのであって単独にあらわれてくるものではない。したがって，低学年から系統だてて指導する必要がある。

(3) 指導内容の系統 ―関数―

3年

2つの数量を関係づけてみることや，その関係を調べる見方を漸次のばす。

ア 簡単な場合について，対応する数量を考え，値の組を作ったり，これを表などにまとめたりすること。

- 具体的な場において2つの数量を関係づけてみる見方をわからせていくようにする。
- 与えられた数量について，変化させるものと変化させないものを意識させる。
- 具体的な2つの数量について，1つの数量を単独にみるというのでなく2つの数量に関連のある事がらをとらえさせる。

4年

伴って変わる2つの数量について，その関係を調べる能力をのばす。

ア 変化の様子を折れ線グラフなどに表わしたり，それから変化の特徴をよみとったりする。

- 表をもとにグラフ化する時，順序対を用いる。
- 一方の数量が増加すれば，他方はそれに伴って減少するなど，また，中間値や将来の見通しも読みとる。

5年

簡単な式で表わされている関係について，変わる数量と変わらない数量の区別や対応する数量の変わり方に着目するなど，数量の関係の見方や調べ方についての理解を深める。

ア 実際の数量の関係が$A\times B=C$や$A+B=C$などの形で表わされる場合について，A，B，Cなどの1つがきまった数であるとき，ほかの2つの数量の変わり方を知ること。

- $A\times B=C$の関係で，A，B，CのうちAまたはBがきめられた数で，のこりの2つが変数であるとき，正比例の関係ができること。Cがきめられた数のとき反比例の関係ができることを，具体的な数量の意味から理解する。

  （例） 単価×数量＝代金，　速さ×時間＝道のり

- 数量の変わる範囲について，漸次着目させる。

6年

比および比例の意味について理解させ，数量の関係を考察したり，表現したりする能力をのばす。

ア 比の意味を知り，これを用いること。

- 比や比の値の表わし方，比の相等の調べ方

- 数量関係の考察に，比や比の値を積極的に用いる。

イ　比例（正比例）の意味を知ること。また，式やグラフについてその特徴を知ること。

- （定義）　2つの数量があって，一方が2倍，3倍…………になると，他方も2倍，3倍………となり，一方が$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，になると，他方も$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$………となるとき，この2つの量は比例（正比例）するという。
- （性質1）　2つの数量が比例するとき，一方の量の変化の割合（比や比の値）とそれに対応する他方の量の割合は等しくなる。
- （性質2）　2つの数量が比例するとき，2つの量の対応する数の割合（比や比の値）はいつも等しくなる。
- （性質3）　比例する2つの量の関係を表わすグラフは，たて軸と横軸が交わっている点から引いた直線になる。

ウ　反比例の意味を知ること

- （定義）　2つの数量があって，一方が2倍，3倍，……になると，他方は$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$………となり，一方が$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$………になると，他方は2倍，3倍………となるとき，この2つの量は反比例するという。
- （性質1）　2つの数量が反比例するとき，一方の数量の変化の割合（比や比の値）は，それに対応する他方の数量の変化の割合の逆数に等しくなる。
- （性質2）　2つの数量が反比例するとき，2つの数量の対応する数の積は，いつも等しくなる。
- （性質3）　反比例する2つの数量の関係を表わすグラフは，たて軸と横軸に近づくなだらかな曲線となる。

エ　比例関係に着目して考察すると能率よく処理できる事象が多いことを知る。

- 速さなど，異種の量の割合，辺の長さと面積，体積の関係，分離量では単価と個数，値だんの関係，理科の分野では，てこや歯車など，比例・反比例関係になっているものが多い。これらを積極的に用いると処理が能率的になること。

3　単元展開の構想

伴なって変わる2量の中にはxがふえればyもふえるという関係のものがあることを発見させ，さらに，その中より比例関係をとらえ，定義づけ，式，表，グラフに表示することにより，比例関係の理解を深めていく。

伴なって変わる2量
- 増→増の関係
  - 差一定
  - 商一定 → 比例関係
- 増→減の関係
  - 和一定
  - 積一定 → 反比例関係

比例関係・反比例関係 → 関数としての定義づけ → 倍数比例の考えの補充 → 式，順序対，表グラフ表示による比例関係の深め。

4 指導上の強調点，留意点

(1) 伴なって変わる2量のは握と考察

問題の中の2つの数量を変量としてとらえ，その一方を自変量，他を従変量として，はっきり区別ができるようにすること。また，自変量のとる定義域従変量のとる値域を知る。

(2) 比例（反比例）の意味指導

関数としての比例（反比例）の意味を明らかにする。

① 対応している値の商（積）に着目すると，それがどこにも一定になっているという見方に重点をおく。これは2つの数量が比例関係にあるかどうかを調べたり，また，それを式に表わしたりするのにも有効な方法であることを感じとらせるように導く。

② 既習の同じ関係にあるものを表に整理して比較させ，共通点をことばや式にまとめ「比例」のことばを与える。

(3) 比例のグラフの特徴のおさえ

関数のグラフとしての意味をしだいに明らかにするとともに，変数の変域にも注意して，グラフを書くようにする。

① 原点の扱いを考慮し，関係式より導入→$\left.\begin{array}{c}\text{順序対}\\\text{表}\end{array}\right\}$表示→グラフ表示と展開

② 順序対を座標とみて，座標平面上の点と対応させる。

③ x，yの値に，小数値もとり変域を考えさせる。

④ 変数が連続量のときは，原点を通る直線になる。その傾きは比例定数に関係する。

さらに，表やグラフは表現上の差異はあっても，本質的には順序対の集合を表わしているという意識をもたせるようにする。また，関数とグラフの形の結びつけという点の考察もたいせつにしたい。

5 指導事例

(1) 単元名　　比例・反比例 (1)　＜6年＞

(2) 目　標

① 比例の意味を知らせ，比例における関数関係について理解させる。

② 比例する2量の関係を表，式，グラフに表わし，その特徴を知らせる。

③ 反比例の意味を知らせ，反比例における関数関係について理解させる。

④ 反比例する2量の関係を表，グラフに表わし，その特徴を知らせる。

⑤ 対応表の作成などにより，関数的な見方，考え方をのばす。

(3) 指導計画

① 比例……………………………………………7時間

ア 水を入れる時間と水の深さ。道のりと走った時間との関係を調べる。　(1)　（本時）

イ 比例の意味の理解　(1)

ウ bがaに比例するときは，aもbに比例すること　(1)

エ 比例する2つの量では，いつも$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$の関係があることの理解　(2)

オ　比例する2つの量の関係を表わすグラフの読み方，かき方　(1)

カ　練習問題　(1)

② 反比例……………………………………6時間

③ まとめ・練習問題………………………2時間

④ 事前・事後テスト………………………1時間

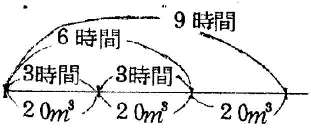
(4) 本時の指導

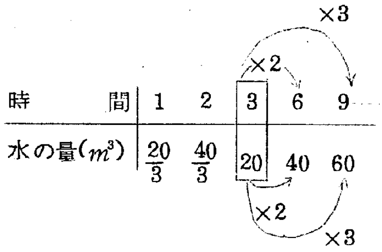
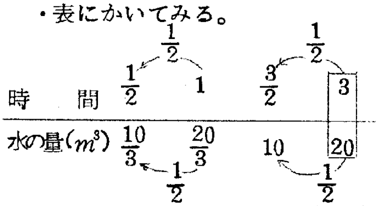
① 題　材　　比例

② 本時の目標

2つの量の変化を対比し，時間と水の量との関係を知らせる。

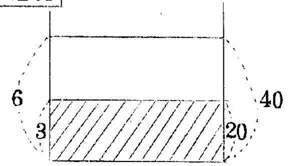
③ 展　開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
時間と水の量の関係	プールに水を，3時間に20m^3の割合で入れるとき，時間と水の量の変わり方を調べましょう。	
	1　何を，どのように調べたらよいか話し合う　（グループ） ・時間が変化するに伴なって水の量がどう変化するか。 ・ある時間をとった時の水の量を求めればよい。	○ 2つの量を対比させ「時間がきまれば，水の量はきまる」ことに着目させる。
	2　時間に対する水の量を調べる。 ・3時間に20m^3だから 1時間 ー　$20 \div 3 = \frac{20}{3}$ (m^3) 2時間 ー　$\frac{20}{3} \times 2 = \frac{40}{3}$ (m^3) 3時間 ー　$\frac{20}{3} \times 3 = 20$ (m^3) ⋮　　⋮ ・  ・3時間　　　20 (m^3) 6時間 ー　$20 \times 2 = 40$ (m^3) 9時間 ー　$20 \times 3 = 60$ (m^3)	○ 具体的に時間を決め（整数）その時の水の量を調べる。
対応表の作成	3　時間と水の量の変わり方を整理して表におきかえてみる。	○ 対応表の作成は，記号などが入っている式や，はんざつな図などか

	・何と何の関係を表に作ったらよいか。 項目を考える「時間」「水の量」  $\begin{array}{l\|ccccc} 時間 & 1 & 2 & \boxed{3} & 6 & 9 \\ \hline 水の量(m^3) & \frac{20}{3} & \frac{40}{3} & \boxed{20} & 40 & 60 \end{array}$	ら，より具体的に，簡潔に変化をとらえ，規則性を見いだすためのものであることを知らせる。 ○対応表の作成にあたり特に，次のことをおさえて指導するようにする。 （集合）時間　水の量 （変数）時間　水の量は変化する （対応）時間がきまると必ず水の量もきまる。 （順序）順序よく小さい順に並べていく。
2量の関係	4　2つの量がどのように変化しているか，規則性を話し合う。 ・時間が長くなると，水の量はふえる。 ・時間が2倍，3倍となると，それにつれて水の量も2倍，3倍になる。	○3時間に20m^3を基準にして，時間の変化につれて水の量が変化していることに気づかせる。 ・「ふえればふえる」
整数から分数への拡張	5　時間を$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$にすると,水の量はどのように変わるか話し合う。 ・時間が短かくなれば，水の量はへる。 ・時間が$\frac{1}{2}$なら，水の量も，もとの$\frac{1}{2}$になる。 ・表にかいてみる。  $\begin{array}{l\|cccc} 時間 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \boxed{3} \\ \hline 水の量(m^3) & \frac{10}{3} & \frac{20}{3} & 10 & \boxed{20} \end{array}$	○時間のとりうる範囲を，整数から，分数まで拡張する。 ○「へればへる」規則正しく減少することに気づかせる。 ○時間を$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$………にすると，それにつれて水の量も$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……となることに気づかせる。
まとめ	6　時間を2倍，3倍……，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……にすると，それにつれて水の量も2倍，3倍………，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$………となる。	○変化する2つの量の関係について時間と水の量の間には， 2倍，3倍……，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$にすると，それにつれて他方も2倍，3倍，……，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……になる関係があることをまとめさせる。

(5)　子どもの反応例

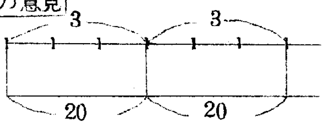
Mの意見



この入れものがプールだとして，3時間水を入れると，20m^3になります。

時間によって水の量が変わってくるのだから，6時間だと2倍の40m^3になります。

Iの意見



3時間×2＝6時間，　20m^3×2＝40m^3

3時間×3＝9時間，　20m^3×3＝60m^3

3時間たつとプールの水が20m^3だけふえるのだから，3時間に2をかけ，20m^3に2をかけて，6時間に40m^3となる。これをどんどんやっていく。

Sの意見

$$\frac{20m^3}{3時間} \times \boxed{1} = \frac{\boxed{}\;m^3}{\boxed{}\;時間}$$

3×1＝3（時間）　20×1＝20（m^3）

3×2＝6　20×2＝40

3×1とか20×1，時間と水の量をみんな同じに倍したわけです。$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{3}$，………いろいろあります。この時，割合はみな同じです。

「時間と水の量の変わり方を調べましょう」と問題を提示したが，漠然としており，意味のとれない児童もいた。「時間を変化させると，水の量はどのように変わるか」と提示した方がよかったのではないか。また，何名かは，時間と水の量の商が一定」になることも見つけだしていた。

6　まとめ

(1)　関数的な見方・考え方といった時，集合，変数，対応，順序の4つの観点から考えることが大切であった。

対応表を作成することは，項目を定めなければならない。（集合）　その項目は変わりうる値である。（変数）　一方を決めれば，他方は必ずきまること。（対応）　規則性をみつけるには，小さい順に並べるとみつけやすい。（順序）　これら4つの観点をおさえることになる。

このことから，対応表を作成する過程において，関数的な見方，考え方を少しではあるが，持つことができたのではないかと思う。

(2)　対応表から，たての関係「商一定」はすぐに見つけだせたが，表を横に見て「比と比の値が等しい」性質をみつけだすのは困難であった。

(3)　「比例・反比例(2)」では，比例，反比例の定義，性質を用いて問題解決ができること，　問題

解決に用いた考えを明確にいい表わす能力をのばすことに目標を置いた。しかし，考えを明確にいい表わすことはよくできない。

定義を用いて解いたものには，どんな意味があるのか。性質１，または，性質２は具体的に何を求めていたのか。対応表から比例，反比例の定義，性質を導きだしたとき，もっと具体例をあげ，それを一般的なことばで（一般→具体）きちんと説明できるようとらえさせるべきであった。

「比例，反比例の関係」の授業を通して，関数的な見方，考え方をのばすよう努力したわけであるが，まだまだわからないことばかりである。一時間，一時間の授業を大切にし，今後も，研究を進めていきたいと思う。

評

算数，数学の現代化について，内容や指導方法など，先生方の研究が深められ，実践されていることを力強く思います。指導に当って，教師の構えがいかにだいじであるかはいまさら申すまでもありませんが，新しい内容については特にその必要があると思います。

その立場から，本稿によって，現代化の内容を具体的にとらえ適切に役立てていただけるものと思います。関数をとり上げ，指導要領を的確にとらえての指導内容の系統，指導事例，考察とそれらを支える考え方，実践を通しての研究は誠にすばらしいものです。

この研究を十分消化していただき，児童の思考力を育てるための実践活動のうえに生かしてくださいますようご活用をお願いいたすとともに，熱心にご研究くだされ発表してくださった須藤先生に心からお礼を申し上げます。