位相的な見方・考え方を育てる指導

足利市立東小学校　須　藤　春　男

Ⅰ はじめに

トポロジー(topology)が数学の一人前の分野と認められたのは今から５０年ほど前で物理学の要求，特に原子物理学からの影響が大きく，この20年間にたいへん発達しtopologyの思考は驚くほど数学の各分野に浸透している。

新指導要領では，位相的な見方・考え方を用いて図形を処理することについては，表面だててふれていないが，現代の数学の発展に即応できる基本的な概念や構造となる事柄を重視している今回の改定では，無視できない問題であると思う。

これまでの図形指導は，ユークリッド幾何を中心とした図形の性質（剛体運動によって変わらない性質）の考察に，その重点がおかれてきたといえる。これに対して，もっと図形や空間についての見方をゆるやかにし，より幅広く，図形を見たり，考えたりすることができるようにし，いろいろな図形の見方を豊かにしようという観点から，位相的な見方を新しい内容として，小学校でも取り扱いたいものである。

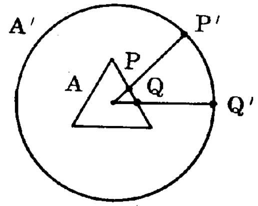
そこでtopologyを小学校にどのようにしてとり入れ，位相的な見方，考え方を育てていったらよいかを考えてみたいと思う。

2 トポロジー(topology)の概念

ユークリッド幾何は，形と大きさを変えない剛体運動（合同変換）によって不変な性質（幾何学性質という）を研究するものであるが，これに対して，弾性運動（位相変換）によって保存される性質を研究するのが，位相幾何学(topology)である。

では，位相変換とはどのようなことか。

２つの図形Ａ，Ａ′があって，Ａ上の点Ｐと，Ａ′上の点Ｐ′との間に，次のような対応関係が成り立つとき位相変換という。



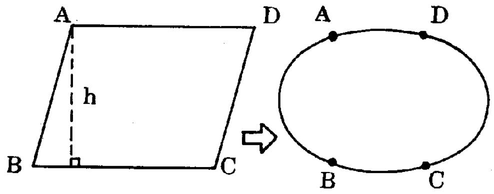
(1) ＰとＰ′とは，１対１の対応をする。

(2) Ａ上の２点，ＰＱをとり，ＰＱ間の距離も０に近づくように連続的にＰをＱに動かせば，対応するＡ′上の２点Ｐ′Ｑ′の間の距離も０に近づき，またこの逆も成り立つ（連続写像）

このような対応関係が成り立つとき，位相変換という。

また，ある図形の性質であって，この位相変換で変わらないような性質だけに着目して，これを研究していく幾何学をtopologyという。

たとえば，次のような平行四辺形があるとき，



消える

① AB＝6 cm,　　AD＝8 cm,　　h＝5 cm

② 面積は40cm²である。

③ 2組の対辺は，それぞれ平行である。

④ 2組の対角は，それぞれ等しい。

⑤ となり合う2っの角の和は，2∠Rである。

消えない

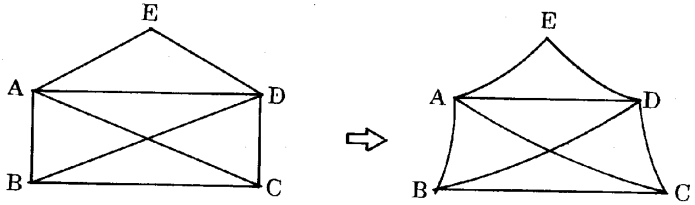
⑥ 各頂点から，2つの辺がでている。

⑦ 辺上でAからCにいくのに，BかDを通る。

⑧ 四辺形は，平面を内側と外側にわける。

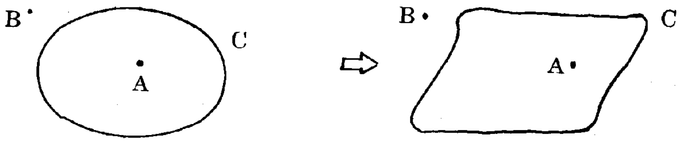
① ～⑧のような幾何学的性質が考えられる。しかし，位相変換すると，① ～ ⑤までの性質は消えるが，⑥ ～ ⑧までの性質は消えない。すなわち，⑥⑦⑧の性質は位相的性質である。

㊞



一筆でかけるという性質は，位相的性質である。

㊞



円周Cは，平面を次のような3つの集合に分割する。

① 内の内部の点

② 円周上の点

③ 円の外部の点

平面内におかれた円周のこの性質は，位相的性質である。しかし，AとCとの距離は，BとCとの距離よりも小さいという性質は，位相的性質ではない。

このようにtopologyとは，図形の位相的性質についての研究である。

3 指導の実際 （第6学年）

(1) 指導計画

① 一筆がきのきまり……………………………………第1時

② 多角形の頂点，面，辺のつながり……………………第2時

(2) 指導の展開

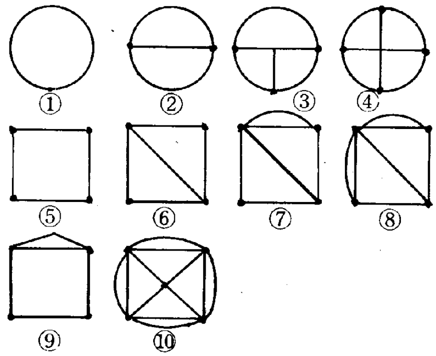
〔第1時〕

① 題　目　　一筆がきのきまり

② 目　標　　一筆がきの問題は，点と線のつながりの問題であることを理解させ，そのきまりを見いださせる。

③ 展　開

	学　習　活　動	指導上の留意点
観察する	1　本時の学習について話し合う。 2　次の図の中から，一筆でかけるものとかけないものに弁別する。	・一筆がきとは，かきはじめたら筆を紙から離さずに，一筆で全体をかくことであることを知らせる。 ・図はプリントしておき，実際に色えんぴつでなぞらせる。 ・O.H.P を用いて実際に一筆で書けるか，かけないかたしかめさせる。



・一筆でかける図とかけない図にわける。

・気づいたことはノートにメモさせておく。

かける	①	②	⑤	⑥	⑦	⑨
かけない	③	④	⑧	⑩		

3　頂点に着目し，偶頂点，奇頂点の数を調べ表にまとめる。

(1)一筆でかけた図について考察する

・一筆でかける図は，　～ であるというようなことを子どもなりに予想としてつかませたい。

	①	②	⑤	⑥	⑦	⑨
偶頂点	1	0	4	2	2	3
奇頂点	0	2	0	2	2	2

(2)一筆でかけなかった図について考察する

・一筆でかけた図と対比させる。

	③	④	⑧	⑩
偶頂点	0	0	0	1
奇頂点	3	4	4	4

きまりを思い出し一般化する

4　調べた表から，一筆がきにはどんなきまりがあるか話し合う。

・一筆でかけた図は，どんな条件をみたすか調べさせる。

一筆でかける図
(1)　偶頂点のみからなる図
(2)　奇頂点が２つで，他は偶頂点の図

・偶頂点，奇頂点に着目させて，どのような図であれば一筆でかけるのか，帰納的に一筆がきのきまりについて考えさせる。

適用する	5　練習問題をする。 6　本時のまとめをする	・練習問題はプリントしておく。

④　結果の考察

本時は一筆書きのきまりを児童に発見させたいというねらいで展開したわけであるが，1時間扱いではすこしむりがあったようである。一筆書きのきまりを帰納的に考えさせたわけであるが，もっと多くの図から一筆で書ける図，一筆でかけない図を類別させ，一筆書きのきまりを考えさせた方がよかったようである。また，児童はただ問題の答えがでればよいということに考えがちのようであったが，「なぜ一筆でかけなかったのだろうか」「なぜ一筆でかけたのか」等の場面をもうすこし時間をかけて考えさせる必要があった。しかし，このような素材には特につみ重ねられた予備知識というものが，根底になくても対象を見て，いろいろ見つけることができるので児童はたいへん興味を示し，意欲的に学習をしてくれた。その反面，ややもすると，興味体位に終わってしまうきらいがあった。それを単なる遊びに終わらせてしまわないためのくふうが必要である。

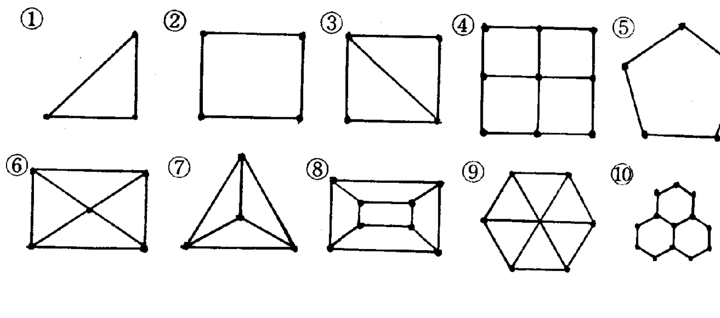
〔第2時〕

①　題　目　　多角形の頂点・面・辺のつながり

②　目　標　　頂点の数−辺の数＋面の数＝1　の関係を理解させる。

③　展　開

・	学　習　活　動	指　導　上　の　留　意　点
観察する	1　本時の学習について話し合う。 2　次のような図形について，その頂点の数，辺の数，面（多角形でかこまれた領域）の数を数え，表にまとめる。	・図と表はプリントしておく



	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
点の数（a）	3	4	4	9	5	5	4	8	7	13
面の数（b）	1	1	2	4	1	4	3	5	6	3
辺の数（c）	3	4	5	12	5	8	6	12	12	15

仮説をたてる ↓ 検証する

3　表から点の数，面の数，辺の数の間にどんな関係があるか調べ，わかったことについて話し合う。

・（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1

・（点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝1

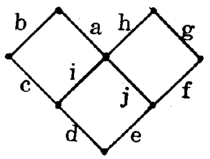
・気づいたことは，ノートにメモさせておく。

・点の数，面の数，辺の数の関係を帰納的に見つけさせるようにする。

4　（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1 に，なるわけについて考える。

・子どもなりに考えさせ，あまり深入りしないようにする。

(1)　下の図について考える。



点の数＝8

面の数＝3

辺の数＝10

（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1

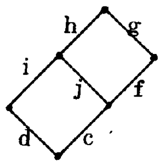
⋮　　⋮　　⋮

8　＋　3　＝　10　＋1

が成り立つ。

(2)　折れ線a，b，c，をとる。

・（点の数）＋（面の数）も3つへり（辺の数）も3つへることから式に変わりがないことに気づかせる。



点の数は2つへる

面の数は1つへる

辺の数は3つへる

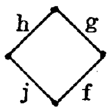
（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1

⋮　　⋮　　⋮

6　＋　2　＝　7　＋1

は成立する。

(3)　折れ線i，d，e，をとる。



点の数は2つへる

面の数は1つへる

辺の数は3つへり

（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1

⋮　　⋮　　⋮

4　＋　1　＝　4　＋1

が成立する

一般化する

5　点，辺，面の3つの要素の数の間の関係をまとめる。

・子どもの発表を板書しながらまとめるようにする。

適用する	点の数を a 辺の数を b 面の数を c とすると $a+c=b+1$ または $a-b+c=1$ の関係がある	
	6　練習問題をする	・練習問題はプリントしておく
	7　本時のまとめをする	

④　結果の考察

ここでは帰納的な考え方によって，多角形の頂点，面，辺のつながりの関係において（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝1の関係を理解させ，中学への橋わたしをしようとくふうし展開したわけであるが，1時間扱いで一般化するまでには少々時間が不足した。しかし，児童は意欲的に学習した。

表をもとにして仮設をたてる段階で，半分位の児童は（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1の関係があることに気づいた。（点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝1の関係に気づいた児童は7名であった。その7名は表からこの関係を気づいたのでなく（点の数）＋（面の数）＝（辺の数）＋1の関係式から考えた。表から関係式を考えだすということは，児童にとってはむづかしいようである。

4 おわりに

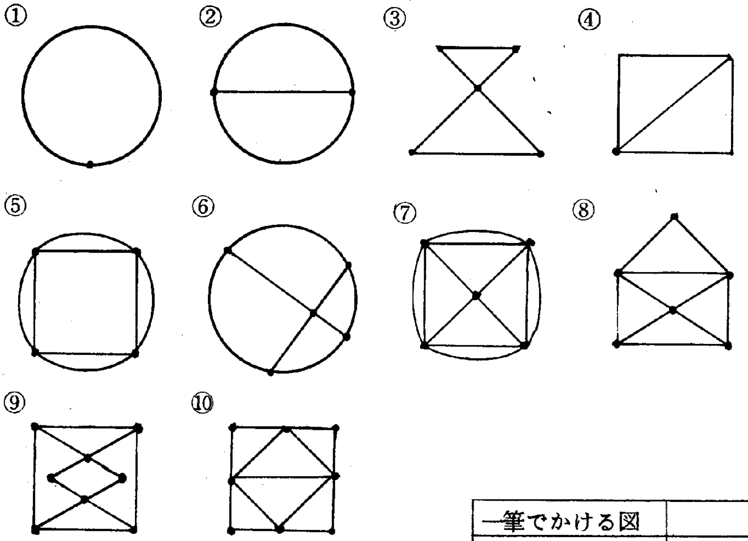
このような素材には，特につみ重ねられた予備知識というものが根底になくても，対象を見ていろいろ見つけることができるので，児童はたいへん興味を示し，しかも意欲的に学習を進めてくれる。しかしその反面，ややもすると，興味本位に終わってしまうきらいがある。それを単なる遊びで終わらせてしまわないためのくふうが必要であると思う。

また，ここでやろうとしたことは，初歩の位相的性質を教えようということでもなければ，topology を消化しやすい形になおして，子どもたちに与えようとしていることでもない。これまでの図形教育（図形ばかりではないが）になかった位相的な見方，考え方をじかに子どもたちに発見させていこう。そして，創造的な態度を育てていこうということである。

なお，このように広い角度から，図形を考察することができるように，指導することにより，能力の低い子どもにも，図形のもつ法則性を自ら発見し，最小限のきまりの中で，図形を創造的に操作するよろこびを，感得させることができた。

一筆がき練習問題

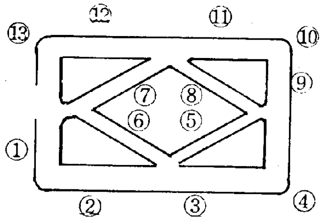
1　次の図形の中から，一筆でかけるもの，かけないものにわけてみましょう。



一筆でかける図	
一筆でかけない図	

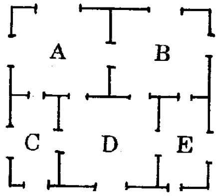
2　右の図のような動物園があります。

番号の順に進むと，どの道も１度だけ通って，ぜんぶの動物を見ることができるでしょうか。



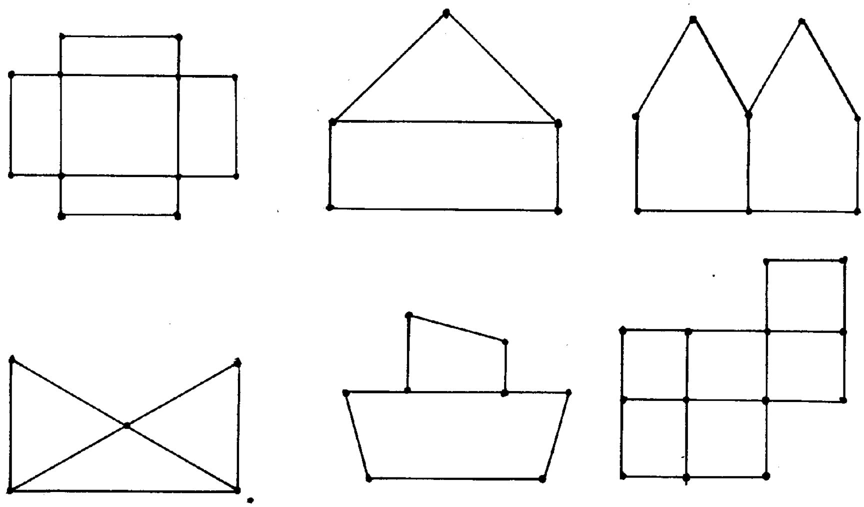
3　右の図は５つの部屋Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅのある家の設計です。

どのドアーも１回ずつ通るようにして，すべてのドアーを通って歩くことができるでしょうか。



多角形の頂点，面，辺のつながり　　練習問題

1　次の図形において，（頂点の数）＋（面の数）＝（辺の数）+1，または（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝1 の関係があることをたしかめましょう。



	①	②	③	④	⑤	⑥
点の数						
面の数						
辺の数						

評

位相的な見方で図形の性質を考察することは，新しく中学3年の内容として取りあげられたものである。図形の線分の長さや向き，角の大きさ，図形の形や大きさなどを無視して，もっとゆっくり観察していこうとするもので，点，線，面のつながりに着目して考察していく立場をとっている。われわれの生活の中でも，案内図や鉄道図などがこの考えが利用されたものである。

小学校では，内容としてとりあげられていないが，いろいろな図形の見方をとりあげ豊かにしていこうとすることは意義のあることと考えます。この実践研究は，位相の観点から図形を考察していこうとする考えから，一筆書きなど身近な教材をとり上げ，直観的，帰納的な考え方を重視して指導している。小学生の発達段階に即した内容であり，取り扱い方も適切である。

小学校における位相の考えに着目した指導の実践例はほとんど見られないときに，意欲的にこの研究に取り組まれた須藤先生の熱意と深い研究に敬意を表します。この新しい研究は，今後の研究のための貴重な参考資料になるものと思われます。